III Jornada Internacional en Ecuaciones
Diferenciales y Aplicaciones
Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña
F.C.M. - U.N.M.S.M. Lima-Perú
Vol. III, No.03, pp. 1–3. 21 al 24 de Octubre 2019

# Ecuaciones de Schrödinger no lineales con crecimiento exponencial crítico

***Yony Raúl S. Leuyacc*** [1]

**Resumen:** En este trabajo estudiaremos la existencia de soluciones no triviales para la siguiente clase de ecuaciónes de Schrödinger no lineales

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u &= g(v), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + V(x)v &= f(u), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

donde $V$ es un potencial el cual puede ser ilimitado o decaer en el infinito, y las no linealidades $f$ y $g$ poseen crecimiento exponencial crítico. Para probar la existencia de soluciones es utilizado un argumento de truncamiento, una aproximación finita dimensional y el teorema del enlace.
**Palabras claves:** Ecuaciónes de Schrödinger, Crecimiento exponencial crítico, Métodos variacionales.

**Nonlinear Schrödinger equations involving exponential critical growth**

**Abstract:** In this work, we study the existence of nontrivial solutions to the following class of nonlinear Schrödinger equations

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u &= g(v), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + V(x)v &= f(u), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

where $V$ is a potential which can be unbounded or vanish at infinity, and the nonlinearities $f$ and $g$ possess critical exponential growth. In order to prove the existence of solutions, we use a truncation argument combined with the linking theorem and a finite-dimensional approximation.

**Keywords:** Schrödinger equations, Exponential critical growth, Variational Methods.

## 1. Introducción

El estudio de ecuaciones de Schrödinger juegan un rol importante en varias ramas de la física matemática y presenta desafiantes dificultades matemáticas. En los últimos años se ha prestado mucha atención a los sistemas Schrödinger

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -\Delta_x \phi + V(x)\phi - \xi_1(x, |\psi|)\psi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ \\ -i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta_x \phi + V(x)\phi - \xi_2(x, |\phi|)\phi, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

[1] UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas; e-mail: yonyraul@alumni.usp.br

donde $i = \sqrt{-1}$, $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ son funciones de onda de Schrördinger, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función potencial y $\xi_1, \xi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ son función adecuadas.

En este trabajo estudiaremos un sistema ecuaciones de Schrödinger (1) de tipo ondas estacionarias, mas precisamente estudiaremos la existencia de soluciones no triviales para el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + V(x)u &=& g(v), & x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + V(x)v &=& f(u), & x \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right. \tag{2}$$

Este tipo de sistemas, bajo varios tipo de hipótesis sobre el potencial y la no linealidades han sido estudiado extensivamente (ver [1, 2, 3, 4]). Nosotros asumiremos que las no linealidades son tipo $f(s) \sim e^{|s|^2}$ y $g(s) \sim e^{|s|^2}$ y el potencial puede tender a cero en el infinito.

## 2. Preliminares

Considere las siguientes hipótesis en $V$:

$(V_1)$ $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ una función radialmente simétrica positiva.

$(V_2)$ Existen constantes $a, b, R_0, L_a$ y $L_b$, con $0 < a < 2$, $b \leq a$, $R_0 > 1$, $L_a \geq R_0^a$ y $L_a R_0^{b-a} \leq L_b \leq L_a^{(2-b)/(2-a)} \pi^{2(a-b)/(2-a)}$, tal que

$$\frac{L_a}{|x|^a} \leq V(x) \leq \frac{L_b}{|x|^b}, \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0.$$

$(V_3)$ $V(x) = 1$ para todo $|x| \leq 1$ y $V(x) \geq 1$ para todo $1 < |x| < R_0$, for $R_0$ dado por $(V_2)$.

Definimos el espacio $H^1_{V,rad}(\mathbb{R}^2)$ como la cerradura del subespacio de la funciones radialmente simétricas en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ con respecto a la norma

$$\|u\| = \|u\|_{H^1_V} := \Big( \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

Con respecto a las no linealidades $f$ and $g$, tenemos las siguientes condiciones:

$(A_1)$ $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ and $f(s) = g(s) = 0$ para todo $s \leq 0$.

Sea $b^* = 2(2 - 2b + a)/(2 - a)$, entonces

$(A_2)$ Existen constantes $\mu > b^*$ y $\nu > b^*$ tal que

$$0 < \mu F(s) \leq s f(s), \quad 0 < \nu G(s) \leq s g(s), \quad \text{para todo} \quad s > 0,$$

donde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt$ y $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(t)\, dt$.

$(A_3)$ Existen constantes $s_1 > 0$ y $M > 0$ tal que

$$0 < F(s) \leq M f(s) \quad \text{y} \quad 0 < G(s) \leq M g(s), \quad \text{para todo} \quad s > s_1.$$

$(A_4)$ Existe $\theta \geq 4a/(2 - a)$ tal que $f(s) = O(s^{\mu-1+\theta})$ y $g(s) = O(s^{\nu-1+\theta})$ cuando $s \to 0^+$.

$(A_5)$ Existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

$(A_6)$ Para $\alpha_0 > 0$ dado $(A_5)$, se tiene

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{t f(t)}{e^{\alpha_0 t^2}} > \frac{4e}{\alpha_0} \quad \text{y} \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{t g(t)}{e^{\alpha_0 t^2}} > \frac{4e}{\alpha_0}.$$

## 3. Resultado Principal

**Teorema 3.1** *Si $V$ satisface $(V_1) - (V_3)$ y $f$ y $g$ satisfacen $(A_1) - (A_6)$, entonces existe una constante positiva $L^* = L^*(f, g, \mu, \nu, \alpha_0, \theta, a, b, R_0)$ tal que el sistema (2), posee una solución débil no nula desde que $L_a \geq L^*$.*

## Referencias bibliográficas


[1] Cao, D. M. *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$. Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), 407-435.

[2] Cassani, D.; Tarsi, C. *Existence of solitary waves for supercritical Schrödinger systems in dimension two. Calc. Var. Partial Differential Equations* 54 (2015), 1673-1704.

[3] de Souza, M.; do Ó, J. M. *Hamiltonian elliptic systems in* $\mathbb{R}^2$ *with subcritical and critical exponential growth.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 195 (2016), 935-956.

[4] de Souza, M. *On a singular Hamiltonian elliptic systems involving critical growth in dimension two.* Commun. Pure Appl. Anal. 11 (2012), 1859-1874.

[5] Leuyacc, Yony R. Santaria and Soares, Sérgio H. Monari *Hamiltonian elliptic systems in dimension two with potentials which can vanish at infinity,* Communications in Contemporary Mathematics, `https://doi.org/10.1142/S0219199717500535` (**To appear**).

[6] Su, J.; Wang, Z. Q.; Willem, M. *Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potentials.* Commun. Contemp. Math. 9, (2007), 571-583.

[7] Su, J.; Wang, Z. Q.; Willem, M. *Weighted Sobolev embedding with unbounded and decaying radial potentials.* J. Differential Equations 238, (2007), 201-219

[8] Trudinger, N. S. *On embedding into Orlicz spaces and some applications.* J. Math. Mech. 17, (1967), 473-483.